Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1992

Option : DEUG A

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 4

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants. La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation globale de la copie.

NOTATIONS. *Dans tout ce texte* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels,* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers rationels,* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres rationnels,* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes.*

Premier problème *(sur 15 points)*

Partie I

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$E = \left\{ x \mid x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \ ; \ a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

1.1 Montrer que E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ à définir.

1.2 Quelle est la dimension de E ? Définir une base simple et "naturelle" de E.

1.3 On définit les applications suivantes définies sur E par :

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = \sqrt{2}x \ , \ f_3(x) = \sqrt{3}x \ \text{ et } \ f_6(x) = \sqrt{6}x.$$

Montrer qu'elles sont internes et définir leurs applications inverses.

2. On pose $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2.1 Calculer u^2, u^3, u^{-1}, u^{-2} et u^{-3}.

2.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $u^n \in E$.

3. On définit les familles de vecteurs :

$$U = \left\{ 1, u, u^2, u^3 \right\} ,$$

Tournez la page S.V.P.

page 262 2/3 1992
E. S. E. M DEUG A

$$\mathcal{U}^- = \left\{1, \frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \frac{1}{u^3}\right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right\}.$$

3.1 Montrer que chacune des familles $\mathcal{U}, \mathcal{U}^-, \mathcal{B}$ constitue une base de E.

3.2 Donner les six matrices de passage entre les différentes bases définies dans la question précédente.

4. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par u et u^2.

4.1 Établir une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un vecteur $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ de E appartienne à F.

4.2 Trouver un sous-espace supplémentaire de F engendré par des vecteurs de $\mathcal{U}^-$.

Partie II

1. On considère le système d'équations :

$$(S) \qquad \begin{cases} ax_n + by_n = x_{n+1} \\ cx_n + ay_n = y_{n+1} \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et où a, b et c sont des paramètres rationnels vérifiant la relation $a^2 = bc + 1$. On note par M la matrice associée au système (S).

1.1 Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) et les vecteurs propres de la matrice M.

1.2 Peut-on réduire M à une forme diagonale (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) ? Donner la forme diagonale.

1.3 Calculer M^n pour $n \geq 1$ et exprimer les x_n et y_n en fonction de x_o, y_o, n et les paramètres uniquement, dans chacun des cas déterminé ci-dessus.

2. Trouver une relation de récurrence entre u^n et u^{n+2} et des relations entre leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$ (on distinguera les cas : n positif et n négatif).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les composantes de u^n dans la base $\mathcal{B}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer les composantes de u^{-n} en fonctions des composantes de u^n, et calculer les composantes de $u^n + u^{-n}$ et $u^n - u^{-n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Partie III

1. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E , définie par :

$$\varphi(u^n, u^n) = 0 \text{ pour } 0 \leq n \leq 3 ,$$

$$\varphi(1, u) = \varphi(1, u^2) = \varphi(u, u^3) = \varphi(u^2, u^3) = \alpha ,$$

$$\varphi(1, u^3) = \varphi(u, u^2) = \beta ,$$

avec α et $\beta \in \mathbb{Q}$. On note par A la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{U}$.

1.1 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ ne soit pas dégénérée.

1.2 Discuter suivant les valeurs de α et β le rang de la matrice A.

1.3 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit positive ; la forme φ peut-elle être positive non dégénérée ?

2. On note par A_1 la matrice associée à la forme φ dans le cas où $\alpha = -\beta = 1$.

2.1 Calculer les valeurs propres de A_1, et indiquer la dimension de chaque sous-espace propre correspondant.

2.2 Calculer les vecteurs propres de A_1 .

3. Soit Q la forme quadratique associée à φ dans le cas où $\alpha = -\beta = 1$.

3.1 Écrire l'expression de Q dans la base $\mathcal{U}$.

3.2 Donner l'expression de la forme quadratique Q dans la base $\mathcal{B}$.

3.3 Réduire la forme quadratique Q à sa forme canonique et exprimer ses axes principaux dans la base $\mathcal{B}$.

4. On considère une forme bilinéaire symétrique g dans E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{U}^-$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 122 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 82 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.1 Montrer que g est positive non dégénérée.

4.2 Exprimer g dans la base $\mathcal{B}$.

4.3 Montrer qu'on peut définir à partir de g une norme notée $\|.\|$ et une distance notée $d(.,.)$ dans E.

4.4 Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\|u^n\|$ et $d(u^n, u^{-n})$.

Fin du premier problème

Second problème (sur 5 points)

1.1 Déterminer les rayons de convérgences des deux séries entières dont les termes généraux sont :

$$u_n = nx^n \quad \text{et} \quad v_n = n^2x^n \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Calculer leurs sommes.

2. François possède trois pièces de monnaie de 1 franc et Hans deux pièces de 1 mark. Ils lancent ensemble les cinq pièces. Soient X le nombre de faces apparues des pièces françaises et Y le nombres de piles des pièces allemandes.

2.1 Donner la loi de probabilités (valeurs possibles et probabilités correspondantes) pour chacune des variables aléatoires : X , Y et $Z = X - Y$.

2.2 Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X et de Z.

3. François dépose une mise a, Hans une mise b (avec $a + b = 10$) et ils conviennent : si $X > Y$ François gagne la partie et encaisse les mises ; $X < Y$ Hans gagne la partie et encaisse les mises et si $X = Y$ ils effectuent un nouveau jet dans les mêmes conditions et sans déposer de nouvelles mises.

3.1 Calculer les probabilités $Prob(X > Y)$, $Prob(X < Y)$ et $Prob(X = Y)$.

3.2 Calculer la probabilité pour qu'ils soient à l'égalité au $n^{ème}$ coup $(X = Y)$.

3.3 Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie au $n + 1^{ème}$ jet.

3.4 Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie.

3.5 Calculer l'espérance de gain de François $E\{F\}$ et celle de Hans $E\{H\}$.

3.6 Le jeu est-il équitable $(E\{F\} = E\{H\})$? Déterminer les mises a et b pour que le jeu soit équitable.

4. Soit N le nombre de jets nécessaires pour terminer la partie.

4.1 Donner la loi de probabilités de la variable aléatoire N.

4.2 Utilisant les résultats de la question 1.2 démontrer l'existence et calculer l'espérance mathématique et la variance de N.